紙要 Double A，萬事都 OK

摘要

本研究使用生活常見的 A4 比例（1：$\sqrt{2}$）紙，藉由數學摺紙與尺規作圖等價方式，尋求徒手摺出正多面體（正四面體、正六面體和正八面體）。在研究過程，除了使用展開圖邊對邊的方式，更進一步探討展開圖其他樣式，在 A4 紙中，試找出摺紙中「正多面體邊長最大值」。

壹、研究動機

在八年級下學期數學課，學到正多面體展開圖，在自行製作立體模型時，常常需逐一畫出多個正三角形、正方形及正五邊形，再以剪刀、膠水等方法裁貼。這時發現如果預先畫好展開圖，可以減少更多的黏貼邊。在比較某一正多面體的成品中，又發現每個人作出的大小不同，因此引發我們想以一張 A4 或 B4 作出體積最大的正多面體。

而當學到尺規作圖時，又發現中垂線、角平分線可經對摺找出，此時我們就想：「既然摺紙好像可以辦到尺規作圖的結果，那麼在作正多面體時，可以只用摺紙摺出來嗎？」

貳、研究目的

一、找出寬：長＝1：$\sqrt{2}$ 矩形中，正四面體、正六面體、正八面體展開圖的正多邊形邊長與矩形寬的最大比值。

二、使用尺規作圖與摺紙的等價關係，歸納摺出所找到展開圖、正多面體需要的技巧。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、GSP、正多面體模型。

肆、名詞解釋

一、面分割：

將正多面體一面，即正多邊形切割成數份，每一切割部份稱子面，子面皆需包含部份多邊形周長。

二、古典展開圖（classical net）：

自正多面體沿邊切割的展開圖，任一面最少有一邊與他面共用。

三、n 面切割展開圖（partition net）：

有 n 面先作面分割，再從正多面體沿邊切割的展開圖，任一面（包含子面）最少有一邊部份與他面共用。

四、摺紙性展開圖（origami net）：

能從摺紙摺成正多面體的展開圖，此研究裡，任一面至少有一點或部份邊與他面共用。

五、A4 比例：

若矩形中，寬：長$=1:\sqrt{2}$，則此矩形為 A4 比例。

六、最大邊長比值：

對於任意一個正多面體的展開圖，只要給定邊長夠小，就必定能放置在 A4 裡。其中邊長最大的展開圖，邊長除以 A4 的寬即「最大邊長比值」。

七、在最大邊長比值裡，使用最大邊長比值在各類展開圖及正多邊形代號為：

	古典展開圖（Classical Net）	n 面切割展開圖（Partition Net）	摺紙性展開圖（Origami Net）
正四面體 Regular Tetrahedron	*Tc*	*Tpn*	*To*
正六面體 Regular Hexahedron	*Hc*	*Hpn*	*Ho*
正八面體 Regular Octahedron	*Oc*	*Opn*	*Oo*

八、而各種展開圖及正多邊形代號編寫方式為：正多面體、展開圖類型-流水號。其中正多面體及展開圖類型皆用英文大寫代表，流水號從 01 開始。

伍、研究過程

一、尋找展開圖最大邊長比值

以下我們在尋找最大邊長比值時，皆假定展開圖置在寬為 1 長為 $\sqrt{2}$ 的矩形內。因此算出來的正多面體的最大邊長即為最大邊長比值。

（一）研究策略

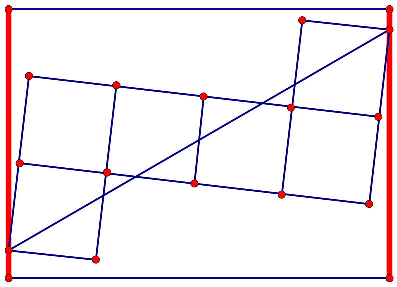
展開圖類型繁多，要求極值（此處泛指最大值）更是繁複，因此我們在討論極值時，依序按照：【古典展開圖】、【n 面切割展開圖】、【摺紙性展開圖】，三種類型展開圖來討論極值。

古典展開圖中，我們從既有的展開圖裡，在正六面體中，找到側面頂邊法，再從側面頂邊法所找極值，回去完成正多面體展開圖。

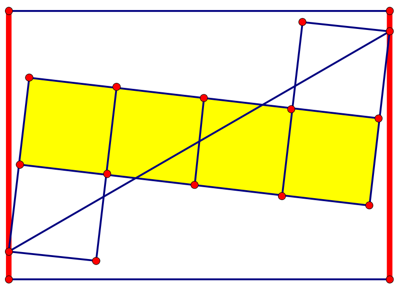
尋找 n 面切割展開圖過程，我們改良在古典展開圖已找出的最大邊長比值展開圖，減少漫無目的的切割，並找出一般用法：「矩形內平行四邊形高的極值」。

由於 n 面切割展開圖可完成的切割樣式多，並且可能無法解出實際值，或者實際值在操作上步驟太繁複。因此在摺紙性展開圖中，我們主要使用富對稱性展開圖，力圖較快速摺出正多面體。

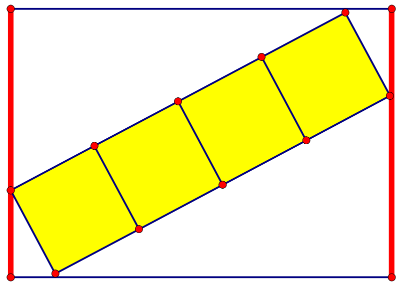
（二）研究方法



1. 【頂邊法】：顧名思義，我們將展開圖的頂點盡量放置到 A4 邊上，亦即將展開圖最長對角線放至 A4 寬上。



但在正六面體找極值時，我們發現實際上考慮中間四塊，對四塊合併的矩形使用頂邊法更有效率，因此往後我們採用側面頂邊法。

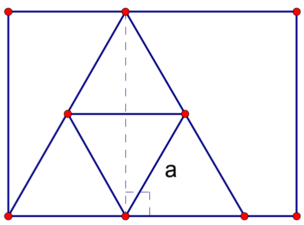
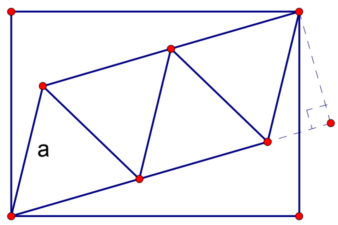


2. 【側面頂邊法】：將正多面體適當地視為柱體（角柱、反角柱），側面所成的展開圖使用頂邊法，即為側面頂邊法。

（三）正四面體

1. 【古典展開圖】

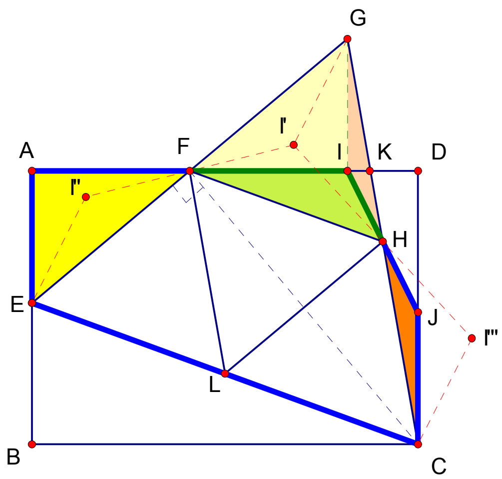
正四面體展開圖只有兩種，用頂邊法，分別求得最大邊長比值 a 以及展開圖：

TC-01	TC-02
 $\sqrt{3}a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}$	 $\sqrt{7}a = \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

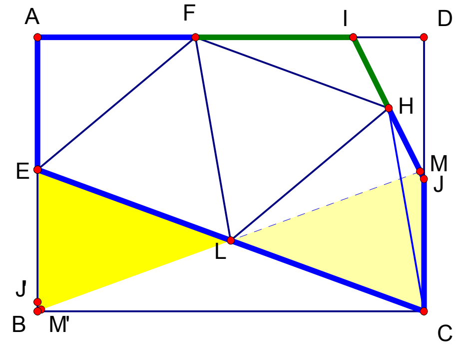
比較 $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，得 $\boxed{Tc = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}$。

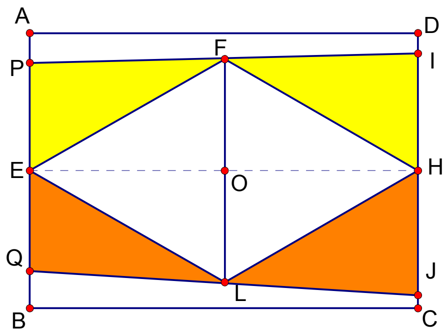
2. 【n 面切割展開圖】

由於正四面體展開圖只有兩種，發現在切割 TC-01 與 TC-02 時，皆得到相同的結果，因此我們採用 TC-01 找 <u>1 面切割展開圖</u>。

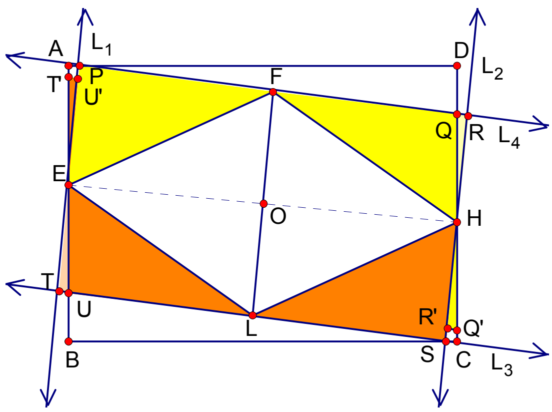
TP1-01	
	矩形 $ABCD$ 內連續三面三角形所成等腰梯形以四邊形 $EFHC$ 為最大，ΔFGH 內任取一動點 I' 可將 ΔFGH 分割，併至 $\overline{EF}$ 、$\overline{HC}$ 上，但為了使展開圖完全在矩形 $ABCD$ 上，只能取 I' 為 I ，其最大邊長比值為 $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{6}}}{3}$ 。 因此 $\boxed{Tp1 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{6}}}{3}}$。

當從 TP1-01 著手切兩面時，在$\overline{HJ}$上找一點M，預從$\overline{ML}$切割，將$\overline{LC}$貼至$\overline{LE}$時，發現菱形$EFHL$並未頂邊，所以考慮E、H個別落在$\overline{AB}$、$\overline{CD}$上。



TP2-01
 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$上取E、H，ΔPEF、ΔIHF為面分割之子面，所以$\angle PFE+\angle IFH=60°$。又$\angle PFE+\angle EFH+\angle IFH=180°$，知$P$、$F$、$I$在同一直線上。同理，可得梯形$PQJI$。此處邊長比值為$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$。

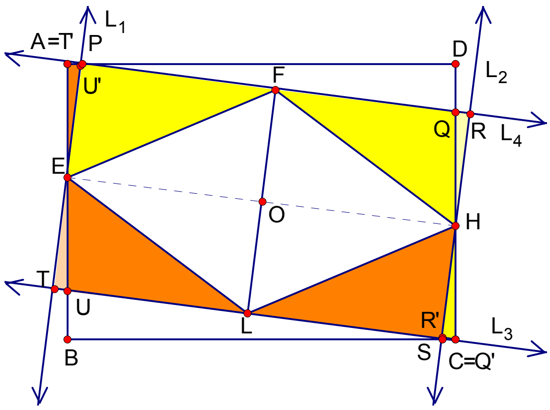
在 TP2-01 中，$\angle AEH=90°$，若能改變$\angle AEH$，勢必$\overline{EH}$會變大，連帶改變邊長比值，所以考慮：

TP2-02
過E、H作$\overline{EH}$垂線L_1、L_2交$\overline{AD}$、$\overline{BC}$於P、S。取$L_4=\overleftrightarrow{PF}$、$L_3=\overleftrightarrow{SL}$各交$L_2$、$L_1$於$R$、$T$，得平行四邊形$PRST$。因為$\overline{RH}$可連在$\overrightarrow{HS}$上，以$H$為圓心將$\Delta HQR$旋轉$180°$得$\Delta HQ'R'$，同理得$\Delta EU'T'$。因此平行四邊形$PRST$可經由切割成多邊形$PQQ'R'SUT'U'$置在矩形$ABCD$內。如果$\overline{EH}$不通過矩形中心$O$，多邊形$PQQ'R'SUT'U'$將超出矩形$ABCD$，所以$\overline{EH}$必須通過$O$。 

所以此處我們希望E點往A移動，以得到最大邊長比值，但是E點移動同

時T'也往A移動，若T'在$\overline{EA}$外，則展開圖便不在矩形$ABCD$內部，所以可以知道<u>極值發生在$T'=A$</u>。

TP2-03



當 TP2-02 中，$T'=A$時，即為 TP2-03。假設展開圖三角形邊長為a，找到一元六次方程式：$c_6a^6+c_4a^4+c_2a^2+c_0=0$，其中$c_6=108$、$c_4=-3(57+22\sqrt{6})$、$c_2=41-19\sqrt{6}$、$c_0=-10+4\sqrt{6}$。

經由 GSP 算出$a\fallingdotseq 0.823$。

此處確定 TP2-03 的邊長為極值，因此$\boxed{Tp2\fallingdotseq 0.823}$。

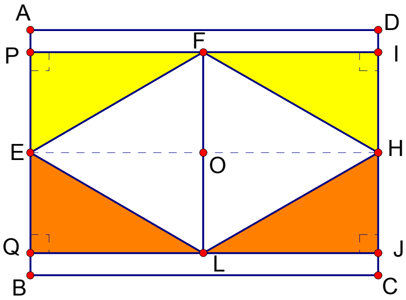
本研究後方有其他一元四次方程式，但形式為$k_4x^4+k_2x^2+k_0=0$，可以使用配方法或公式解解出x^2，再解x。但此處$c_6(a^2)^3+c_4(a^2)^2+c_2(a^2)^1+c_0=0$為三次方程式，國中未有確切工具可以解，實屬憾事。<u>由於「倍立方」不屬尺規作圖範疇，故我們不考慮 TP2-03 摺紙。</u>

在 TP2-03 中，決定邊長比值的重點在$\overline{EH}$，若要找 3 面切割展開圖，要考慮$\overline{RS}$和$\overline{PT}$是否可以黏貼再切割$\overline{EH}$，但實際上是沒辦法的。所以考慮到<u>2 面切割展開圖</u>即可。

3.【摺紙性展開圖】

由於 TP2-01 是屬於快速摺出正四面體的類型，我們稍加改良 TP2-01：

TO-01

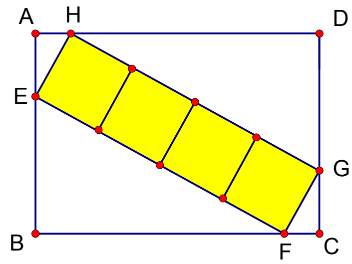


TP2-01 中$\overline{PI}\perp\overline{AB}$、$\overline{QJ}\perp\overline{AB}$，邊長比值$a$滿足$\sqrt{3}a=\sqrt{2}$，得$a=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$。

此處$\boxed{To\geq\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$。

（四）正六面體

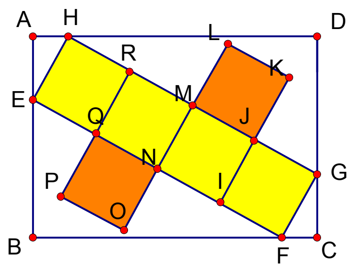
1.　【古典展開圖】



已知正六面體的古典展開圖有 11 種，最初我們預逐一將展開圖帶入，利用頂邊法求得最大邊長比值。但從 11 個展開圖中，我們很快發現到部份展開圖有中間四塊正方形組合成的 4：1 矩形（即四角柱側面展開圖），若能恰當地將四個定點分別置放在 A4 紙的四個邊，可利用相似三角形性質及勾股定理，求得最大邊長比值 $\boxed{Hc=\dfrac{\sqrt{51-16\sqrt{2}}}{15}}$。

在 11 種展開圖中，發現只有 HC-01 可以疊上後完整落在 A4 裡，其餘都會超出 A4 紙的範疇，表示其他展開圖邊長比值無法到達 Hc 。

HC-01



易知 $\Delta AEH \sim \Delta BEF$ 。令 $\overline{EB}=x$，得 $\overline{AE}=1-x$ 、

$\overline{BF}=4(1-x)$ 、 $\overline{CF}=\overline{AH}=\dfrac{x}{4}$ 。

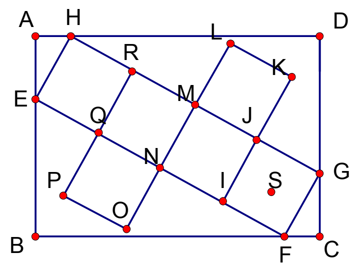
又 $\sqrt{2}=\overline{BF}+\overline{CF}$ 推得 $x=\dfrac{16-4\sqrt{2}}{15}$ 。

最後 $\overline{EH}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{AH}^2}=\dfrac{\sqrt{51-16\sqrt{2}}}{15}$ 。

2.　【n 面切割展開圖】

從滿足 Hc 所對應的展開圖 HC-01，試切割接觸 A4 邊界的正方形，但經由下列證明後，我們發現並無法分散切割的子面，因此 $Hp=Hc$ 。

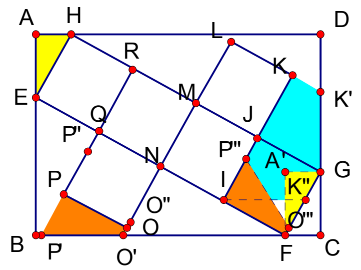
【HC-01 不可分割】



在 HC-01 中，若 S 在正方形 $JIFG$ 裡，由 $\overline{SJ}$ 、 $\overline{SG}$ 、 $\overline{SF}$ 和 $\overline{SI}$ 所切割的子面黏貼到對應邊，則新展開圖必定超出矩形 $ABCD$ 。

證明：

已知$\overline{FG}$與$\overline{EH}$在立體圖中重合，沿$\overrightarrow{HG}$方向$\overline{HG}$長度複製A得A'，則S必落在$\Delta A'GF$上。$\overrightarrow{QP}$、$\overrightarrow{NO}$交$\overline{BC}$於P'、O'，對$\overline{PO}$對稱得P''、O''，沿$\overrightarrow{PI}$方向$\overline{PI}$長度複製P''、O''得P'''、O'''，則S必落在梯形$P'''IFO'''$上。

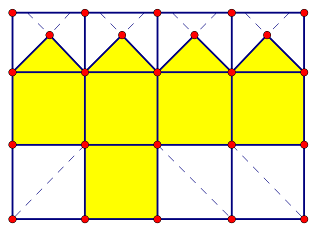


$\overrightarrow{LK}$交$\overline{DC}$於K'，K'對J順時針旋轉$90°$得K''，則S必落在梯形$JIK'G$上。

但$\Delta A'GF$、梯形$P'''IFO'''$和梯形$JIK'G$沒有三部份皆重疊區域，因此找不到符合的S。■

3.　【摺紙性展開圖】

找對稱性時，很容易對摺尋找端倪，這裡我們利用兩次對摺，找出 HO-01。

HO-01	
	邊長比值爲$\frac{\sqrt{2}}{4}$。 所以$\boxed{Ho \geq \frac{\sqrt{2}}{4}}$。

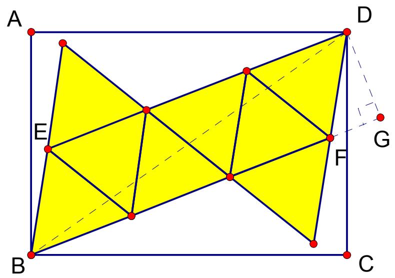
（五）正八面體

1.　【古典展開圖】

有正六面體經驗，我們引入類似角柱概念，將正八面體即正反三角柱（Triangular antiprism），的側面展開，可得到由六個正三角形組合成的邊長 3：1 平行四邊形（其中一銳角爲$60°$），將此平行四邊形較長對角線與 A4 對角線重合，求得最大邊長比值$\boxed{Oc = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}$。

同理，在 11 種展開圖中，發現只有一種可以疊上後完整落在 A4 裡，其餘都會超出 A4 紙的範疇，表示其他展開圖邊長比值無法到達 Oc 。因此 OC-01 如下：

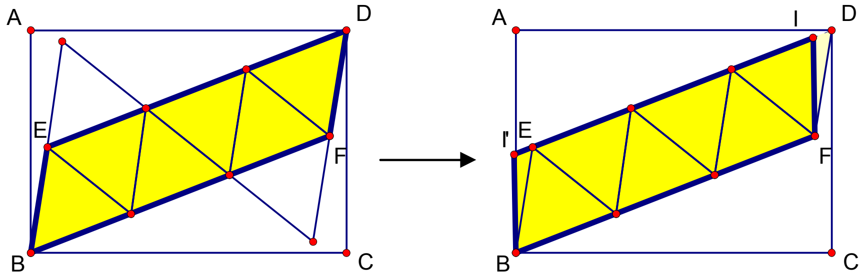
OC-01



令 $\overline{BE}=a$ 、 $\overline{BG}=\frac{7}{2}a$ ，知 $\overline{BD}=\sqrt{13}a$ 。由於矩形 $ABCD$ 對角線長度爲 $\sqrt{3}$，得方程式 $\sqrt{13}a=\sqrt{3}$ ，故 $Oc=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ 。

2. 【n 面切割展開圖】

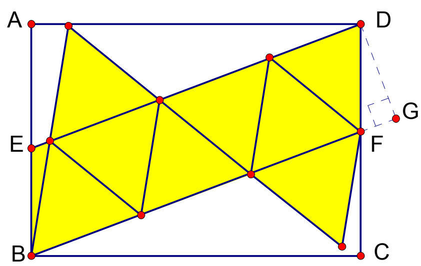
考慮 OC-01 中平行四邊形，短邊並未碰觸 A4 的寬，若能藉由切割 TP2-02 中平行四邊形的技巧，將平行四邊形部份移動，但底高比仍爲 $3:\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，能減少未使用部份。



所以在寬爲 1 長爲 $\sqrt{2}$ 的矩形裡，置放一平行四邊形，底爲 $3a$ 高爲 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，可求得 $a\le Op1$ 。根據 $Op1$ ，找出 OP1-01：

OP1-01

令 D 在 $\overleftrightarrow{BF}$ 上的垂足爲 G ，易知 $\Delta CFB\sim\Delta GFD$ 。設邊長爲 a ，則 $\overline{DG}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 、 $\overline{BF}=3a$ 、 $\overline{FC}=\sqrt{9a^2-2}$ 、 $\overline{DF}=1-\sqrt{9a^2-2}$ 。由 $\overline{DF}:\overline{DG}=\overline{BF}:\overline{BC}$ 得 $9a^4-4(6+\sqrt{6})a^2+8=0$ ，根據公式解



知$a^2=\dfrac{12+2\sqrt{6}\pm4\sqrt{6+3\sqrt{6}}}{9}$。因爲$(\dfrac{1}{3}\overline{BF})^2=\dfrac{12+2\sqrt{6}+4\sqrt{6+3\sqrt{6}}}{9}>3=\overline{BD}^2$

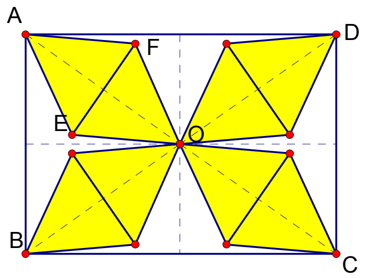
與$\overline{BF}$在矩形$ABCD$內不符，所以$a^2=\dfrac{12+2\sqrt{6}-4\sqrt{6+3\sqrt{6}}}{9}$。

因此$a=\dfrac{\sqrt{12+2\sqrt{6}-4\sqrt{6+3\sqrt{6}}}}{3}$，故$\boxed{Op1=\dfrac{\sqrt{12+2\sqrt{6}-4\sqrt{6+3\sqrt{6}}}}{3}}$。

因爲E、F已經在矩形邊上，因此就算繼續切割，也於事無補。因此找到<u>1 面切割展開圖</u>即可。

3. 【摺紙性展開圖】

正八面體恰巧可以切成 4 組兩相連正三角形，在摺紙性展開圖中，並未要求所有展開圖邊都要共用到，因此找一對成性展開圖爲 OO-01：

OO-01	
	$\sqrt{3}\times\overline{EF}=\overline{AO}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\overline{EF}=\dfrac{1}{2}$， 所以$\boxed{Oo\ge\dfrac{1}{2}}$。

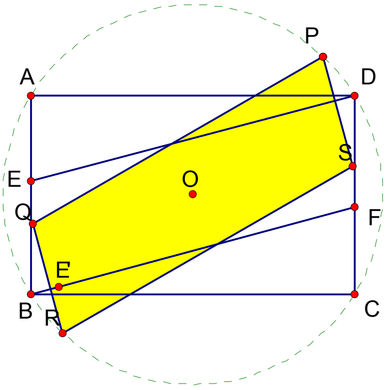
OO-01 算出最大邊長比值剛好是矩形的半寬，若今天包覆展開圖的矩形並非 A4 比例，將會增加摺紙的難度。

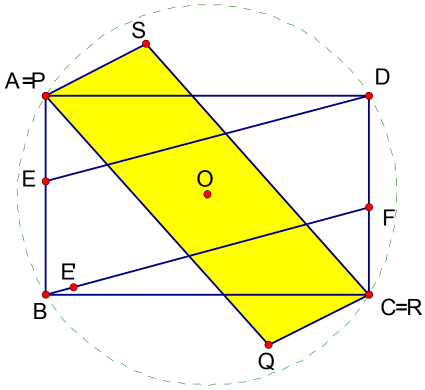
在正六面體、正八面體側面展開圖中，試圖切割側面求最大邊長比值時，發現有一廣泛性問題，即固定平行四邊形底高比，求邊長極值。此處我們發現有一四次方程式，可利用一元二次方程式公式解找出。我們將類似的問題一般化，如下命題：

【矩形內平行四邊形高的極值】

一平行四邊形高爲h、底爲sh，$s>1$，置於寬爲 1、長爲$r\ge1$之矩形內，求h最大值爲何（以r、s表示）？

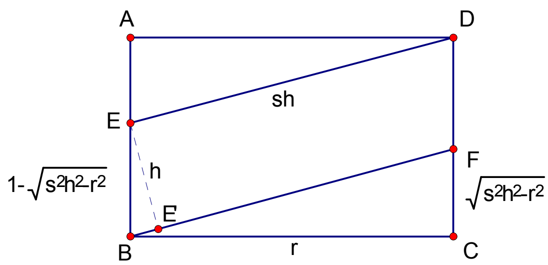
過程：





令矩形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=1$、$\overline{AD}=r$。

設平行四邊形 $EBFD$ 中，E 在 $\overline{BF}$ 垂足爲 E'，且 $\overline{EE'}:\overline{BF}=1:s$。若以矩形對角線交點 O 爲旋轉中心，將平行四邊形 $EBFD$ 旋轉至平行四邊形 $QRSP$，會發現當 $P\neq D$ 或 $P\neq B$ 時，皆有部份區域在矩形 $ABCD$ 外部，因此我們知道 h 最大值發生時，擺放方式即爲平行四邊形 $EBFD$。



故令 $\overline{EE'}=h$。

易知 $\Delta EE'B\sim\Delta BCF$，由勾股定理和對應邊成比例得 $sh:r=(1-\sqrt{s^2h^2-r^2}):h\Rightarrow s^2h^4-(2rs+r^2s^2)h^2+(r^2+r^4)=0$，

由公式解知 $h^2=\dfrac{r}{2s}\times(2+rs\pm\sqrt{4rs+r^2s^2-4r^2})>0$。由於 $h\leq 1$（因爲 $h>1$ 時，平行四邊形 $EBFD$ 不全在矩形 $ABCD$ 內），和 $s\geq r$（因爲 $h\leq 1$ 又 $sh\geq r$，所以 $s\geq sh\geq r$），如果 $h^2=\dfrac{r}{2s}\times(2+rs+\sqrt{4rs+r^2s^2-4r^2})$，因 $s\geq r$ 得 $4rs+r^2s^2-4r^2\geq 4r(s-r)+r^2s^2\geq r^2s^2$，

則 $h^2=\dfrac{r}{2s}\times(2+rs+\sqrt{4rs+r^2s^2-4r^2})\geq\dfrac{r}{2s}\times(2+rs+rs)=\dfrac{r}{s}+r^2>1$，不符合 $h\leq 1$。

所以 $h^2=\dfrac{r}{2s}\times(2+rs-\sqrt{4rs+r^2s^2-4r^2})$，最後 $\boxed{h=\sqrt{\dfrac{r}{2s}\times(2+rs-\sqrt{4rs+r^2s^2-4r^2})}}$。■

二、使用尺規作圖與摺紙的等價關係，歸納摺出所找到展開圖、正多面體需要的技巧

（一） 文獻探討

在譚克平與陳宥良撰寫一文———運用摺紙提升學生尺規作圖技巧，提到：

1. 使用下列四項假設：

第一、摺紙動作所產生的摺痕均可視爲是直線，除此之外，多邊形紙張的邊亦可視爲是直線。

第二、任意兩條不平行直線的相交處可視爲是一個點。

第三、經紙張摺疊後可重合的兩個線段或兩個角均可視爲是相等的。

第四、當一個作圖問題中所有交點的相對位置均確定後，此作圖問題即可視爲已經完成。

2. 六項摺紙動作：

摺紙動作 1、摺出通過兩點的直線。

摺紙動作 2、線上一點作垂線。

摺紙動作 3、線外一點作垂線。

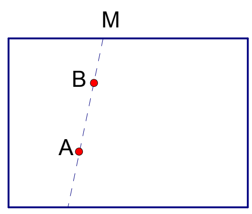
摺紙動作 4、一點到一線，摺線過一點。

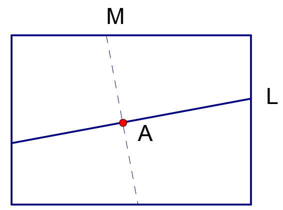
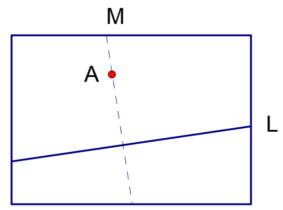
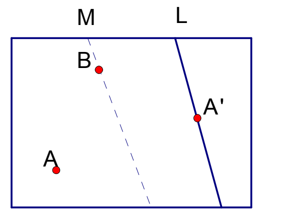
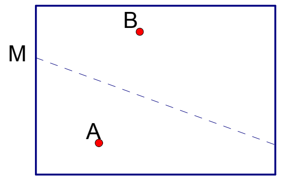
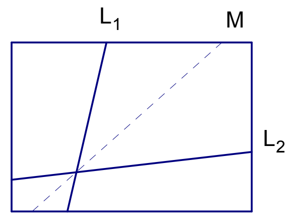
摺紙動作 5、兩點重合。

摺紙動作 6、兩線重合。

由上述四項假設和六項摺紙動作可解決所有尺規作圖會有解的問題。

3. 下列是互相對照摺紙動作、尺規作圖和摺紙所成摺線

摺紙動作	尺規作圖	摺紙所成摺線
摺紙動作 1： 摺出通過兩點的直線	利用直尺畫線	

摺紙動作 2： 線上一點作垂線	線上一點作垂線	
摺紙動作 3： 線外一點作垂線	線外一點作垂線	
摺紙動作 4： 一點到一線，摺線過一點	利用圓規複製線段	
摺紙動作 5： 兩點重合	中垂線作圖	
摺紙動作 6： 兩線重合	角平分線作圖	

（二）基本使用技巧

我們整理出常用的一些技巧：

1. 【鏡射】:

假設圖形 Γ 為可經由摺紙摺出，找 Γ' 為 Γ 鏡射直線 L 之圖形。

作法：沿 L 對摺不攤開，將 Γ 再摺一次，得 Γ'。■

2.　【平移】:

假設圖形 Γ 爲可經由摺紙摺出，將 Γ 由 A 平移至 B 得 Γ''。

作法：A 、B 兩點重合，摺 Γ 得 Γ'。$\overline{AB}$ 上一點 B 作垂線 L，沿 L 對摺不攤開，將 Γ' 再摺一次，得 Γ''。■

3.　【旋轉】:

假設圖形 Γ 爲可經由摺紙摺出，將圖形 Γ 以 O 爲圓心轉 $\angle AOB$ 得 Γ''。

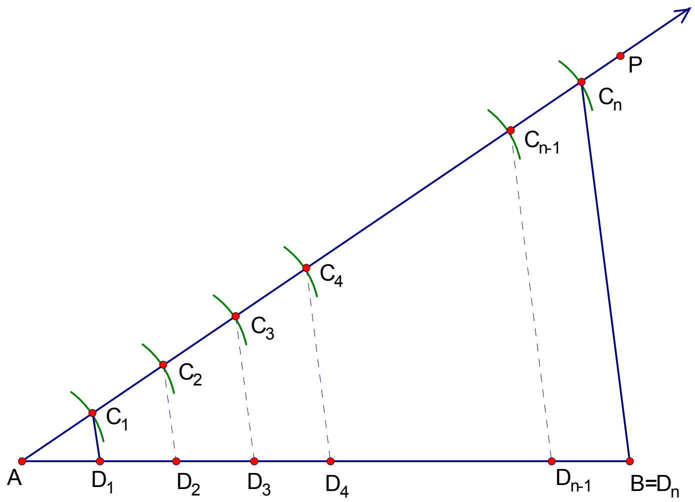
作法：$\overleftrightarrow{OA}$ 、$\overleftrightarrow{OB}$ 兩線重合，摺 Γ 得 Γ'。攤開後，沿 $\overleftrightarrow{OB}$ 對摺不攤開，將 Γ' 再摺一次，得 Γ''。■

上述三項在尺規作圖容易，但在摺紙裡卻不見得較省步驟。以下進階技巧裡，常用到平移、旋轉、鏡射。

（三）進階使用技巧與推導

在尺規作圖裡，我們發現可以 2、4、8、⋯、2^n 等份線段，但要 n 等分線段似乎不能只靠作中垂線的技巧，因此我們用平行線與相似三角形的性質，輔以尺規作 n 等分線段，再利用摺紙的等價關係摺出 n 等分線段。

1.　【尺規技巧 1】尺規 n 等分線段



給定 $\overline{AB}=c>0$ 、$n\in N$，

以尺規作圖 n 等分 $\overline{AB}$ 。

過程：

$\overleftrightarrow{AB}$ 外取一點 P，C_1，沿 $\overrightarrow{AP}$ 方向，依序取 C_1、C_2、C_3、C_4、⋯、C_{n-1} 、C_n ，且滿足

$\overline{AC_1}=\overline{C_1C_2}=\overline{C_2C_3}=\overline{C_3C_4}=\cdots=\overline{C_{n-1}C_n}$ 。

過 C_1 、C_2 、C_3 、C_4 、⋯、C_{n-1} 作直線平行 $\overline{BC_n}$ ，分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 D_1 、D_2 、D_3 、D_4 、⋯、D_{n-1} 。

因為$\Delta ABC_n \sim \Delta AD_iC_i$且$\overline{AC_n}:\overline{AC_i}=n:i$，$i=1,2,3,4,\ldots,n-1$，所以$\overline{AD_i}=\dfrac{i}{n}c$。

即$\overline{AD_1}=\overline{D_1D_2}=\overline{D_2D_3}=\overline{D_3D_4}=\cdots=\overline{D_{n-1}B}=\dfrac{c}{n}$，故$D_1$、$D_2$、$D_3$、$D_4$、…、$D_{n-1}$

為$\overline{AB}$的n等分點。■

2. 【摺紙技巧 1】摺n等分線段

給定$\overline{AB}=c>0$、$n\in N$，以摺紙n等分$\overline{AB}$。

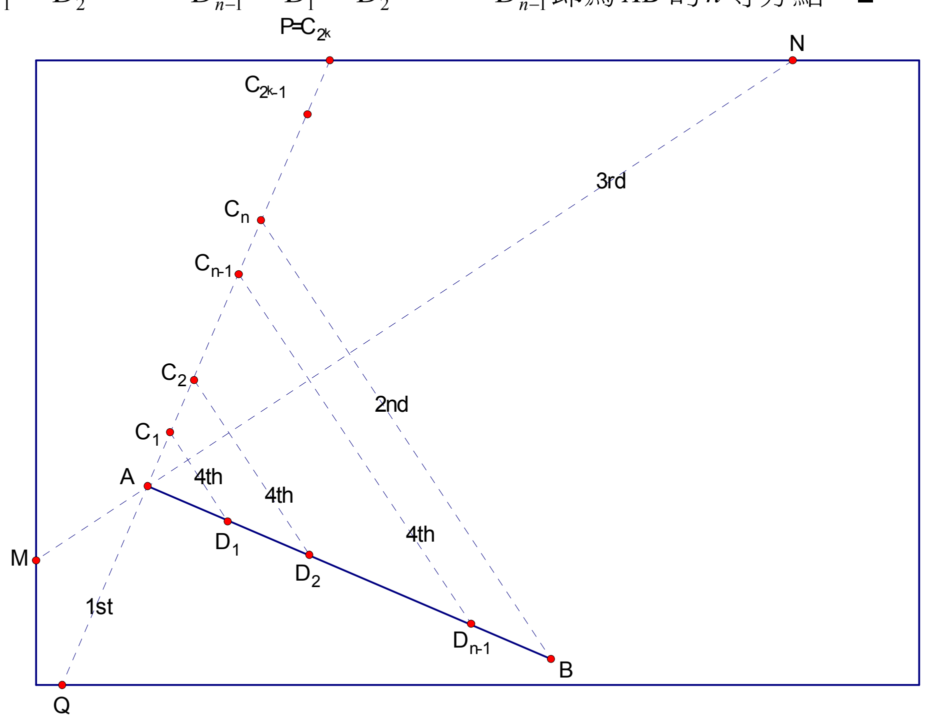
說明：

尺規n等分線段使用畫線、複製長度、複製角度，三項技巧在摺紙皆可操作，故摺n等分線段可行。而複製角度在摺紙上較繁複，因此採用摺紙動作 2（線外一點作垂線）方式。

過程：

過A作摺線垂直$\overline{AB}$交邊界於P、Q，取最小k滿足$2^k\ge n$，將$\overline{AP}$連續對摺k次，由A至P依序得2^k等分點C_1、C_2、…、C_{2^k-1}。

摺$\overline{C_nB}$，過A摺$\overline{MN}$垂直$\overline{C_nB}$，過C_1、C_2、…、C_{n-1}摺線垂直$\overline{MN}$，分別交$\overline{AB}$於D_1、D_2、…、D_{n-1}。D_1、D_2、…、D_{n-1}即為$\overline{AB}$的n等分點。■



3.　【摺紙技巧 2】摺$\dfrac{m}{n}$倍線段

給定$\overline{AB}=c>0$、$m,n\in N$且$m\neq n$，摺出$\dfrac{m}{n}$倍$\overline{AB}$。

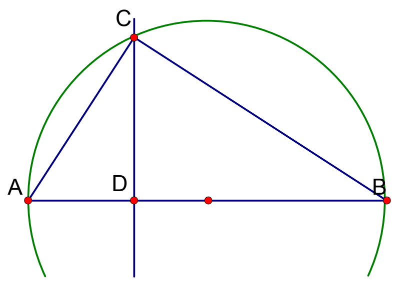
說明：

若$m<n$，n等分$\overline{AB}$取若干連續m段$\dfrac{c}{n}$即爲所求。

若$m>n$，由除法原理知：$m=nq+r$，其中$q\in N$，即$\dfrac{m}{n}=q+\dfrac{r}{n}$。分別在$\overleftrightarrow{AB}$上取$q$倍$\overline{AB}$和$\dfrac{r}{n}$倍$\overline{AB}$於$A$點兩側（$B$點兩側亦可），兩段和$(q+\dfrac{r}{n})\times c$即爲所求。

■

4.　【尺規技巧 2】尺規$\sqrt{ab}$



給定兩長度$a,b>0$，尺規作圖$\sqrt{ab}$。

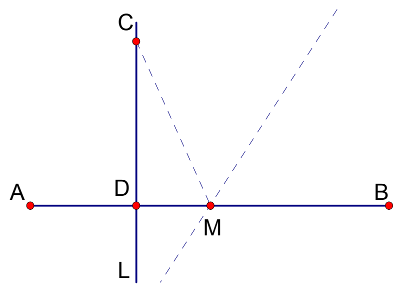
過程：

根據直角三角形子母相似定理，知若一線段$\overline{AB}$上一點D滿足$\overline{DA}=a$、$\overline{DB}=b$，找過D點垂直$\overline{AB}$垂線與$\overline{AB}$爲直徑所成之圓一交點C，則$\overline{CD}=\sqrt{ab}$。■

5.　【摺紙技巧 3】摺$\sqrt{ab}$

給定兩長度$a,b>0$，以摺紙摺$\sqrt{ab}$。

過程：



令$\overline{AB}$上一點D滿足$\overline{DA}=a$、$\overline{DB}=b$，M爲$\overline{AB}$中點，找過D點垂直$\overline{AB}$垂線L。利用摺紙動作 7（一點到一線，摺線過一點），可使摺線過M，B點恰巧在L上，任意作一條摺線與L交於C，$\overline{CD}$即爲所求。■

在【摺紙技巧 3】皆可解決給定任意線段長 x，找出 $\sqrt{x}$。即令 $a=1$、$b=x$，得 $\sqrt{ab}=\sqrt{x}$。但若只想求 $\sqrt{13}$ 時，不妨找兩股各爲 2 和 3 的直角三角形斜邊，因此若 x 可表示成兩有理數平方和，我們將使用較容易的技巧。

6. 【摺紙技巧 4】摺勾股根號數

若 $x=a^2+b^2$ 且 a、b 已知，以摺紙摺 $\sqrt{x}$。

過程：

將 a、b 摺在一直角 C 兩股各得 B、A，則 $\overline{BA}=\sqrt{x}$。■

上述 $x=a^2+b^2$ 中，a、b 並無限定有理數，例如：找 $x=\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{4}}$，可取 $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$、$b=1$。

以摺紙技巧 1、摺紙技巧 2、摺紙技巧 3、摺紙技巧 4，我們可以解決根號裡面還有根號的問題，更普遍性的說法是，給定 a_1、a_2、a_3、…、a_n 爲有理數，類似 $\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\sqrt{\ldots+\sqrt{a_n}}}}}$ 長度都可以摺。

然而在摺紙過程中，我們始終只能在 A4 紙裡作業，所以當長度大於 $\sqrt{3}$ 倍寬，即對角線長度時，無法操作。所以下列先說明最大邊長比值 $\le\sqrt{3}$，再尋求摺紙解決之道。

7. 【最大邊長比值 $\le\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$】

以寬爲 1、長爲 $\sqrt{2}$ 矩形，作一正多面體，其邊長最大爲 $\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$。

證明：

在五種正多面體中，正四面體只需 4 塊相同正三角形，因此每塊正三角形面積最大爲 $\dfrac{1\times\sqrt{2}}{4}$，假設正三角形邊長爲 a，則 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2\le\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，推得 $a\le\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$。若正六面體、正八面體、正十二面體和正二十面體的正多邊形邊長皆爲 $\sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$，其展開

圖面積皆大於$\sqrt{2}$，故原命題成立。■

上述知：最大邊長比值$\leq \sqrt[4]{\frac{2}{3}} < 1 < \sqrt{3}$。所以接下來要找出避免長度超過 A4 對角線的操作。

8. 【摺紙技巧 5】縮小再放大

假設預摺長度a小於 A4 對角線長c，過程需用長度a_1、a_2、⋯、a_k。

過程：

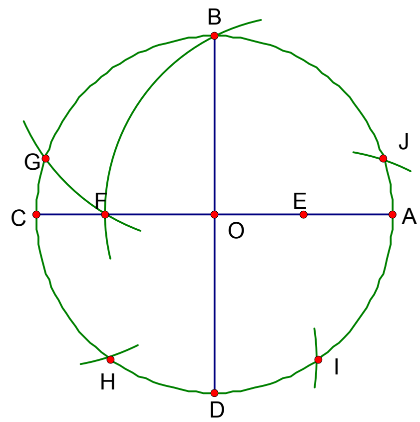
假定長度a_i必須用到a_1、a_2、⋯、a_{i-1}。

若$\frac{a_1}{c}$、$\frac{a_2}{c}$、⋯、$\frac{a_k}{c}$皆小於 1，則直接執行。

若$\frac{a_1}{c}$、$\frac{a_2}{c}$、⋯、$\frac{a_k}{c}$中最大的數爲$d>1$，找一整數$n \geq d$。由$\frac{a_1}{n}$、$\frac{a_2}{n}$、⋯、$\frac{a_k}{n}$摺出$\frac{a}{n}$後，再放大n倍至a。■

圓規可畫圓，但此處無法依摺紙方式摺出圓。因此在尺規作圖中兩圓交點並無法在摺紙中操作，所以我們使用常見的半圓與直角三角形子母相似定理，來解決這類問題。以下比較尺規作正五邊形和使用摺紙的技巧差異。

9. 【正五邊形尺規與摺紙】

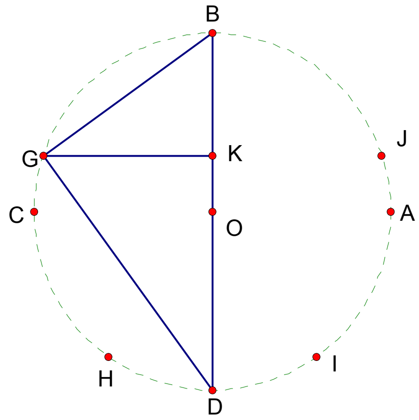


單位圓O上四點$\overline{AC} \perp \overline{BD}$，取$\overline{AO}$中點$E$，以$E$爲圓心$\overline{BE}$爲半徑交$\overline{CO}$於$F$，以$\overline{BF}$爲正五邊形邊長依序在圓$O$上得$B$、$G$、$H$、$I$、$J$，完成尺規作正五邊形$BGHIJ$。

此處G是以B爲圓心、$\overline{BF}$爲半徑之圓與圓O的交點，由於摺紙無法直接取得圓B、圓O交點，因此考慮直角三角形BGD。根據正五邊形作圖過程與勾股定理，知$\overline{BG} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$。因爲$\overline{BD}=2$，所以$\overline{DG} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$。取$K$爲$G$在$\overline{BD}$上垂足，

根據直角三角形子母相似定理，知 $\overline{DK} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$ 。

所以摺紙可得 $\overleftrightarrow{BD}$ 、$\overleftrightarrow{KG}$（知 K 不知 G ），將 $\overline{OD}$ 對到 $\overleftrightarrow{KG}$ 上找出 G ，再找 H 、I 、J ，完成摺紙作正五邊形 $BGHIJ$ 。■



10. 【摺已知展開圖】

只要數字可摺，無論多少次，只要有限次數摺出，我們一律認定是摺紙可解問題。因此在找到的展開圖中，TC-01、TC-02、TP1-01、TP2-01、TO-01、HC-01、HO-01、OC-01、OP1-01、OO-01，均為可摺圖形。

不過要注意和尺規作圖一樣會遇到的問題：「操作性的誤差。」產生操作誤差在所難免，所以當步驟多且值又小，在摺的過程肯定會失真，因此我們雖然確定在操作上沒問題，但精準度卻因人而異。

陸、總結：

一、關於正多面體展開圖最大邊長比值，並未全部找出，依照我們研究結果，未找出的至少會有一個下界，亦即還可再求極值。

1. 最大邊長比值和近似值（四捨五入至小數點第三位）在各種展開圖及正多邊形爲：

	古典展開圖（Classical Net）	n 面切割展開圖（Partition Net）	摺紙性展開圖（Origami Net）
正四面體 Regular Tetrahedron	$Tc=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\fallingdotseq 0.655$	$Tp1=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{6}}}{3}\fallingdotseq 0.753$ $Tp2\fallingdotseq 0.823$	$To\geq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\fallingdotseq 0.816$
正六面體 Regular Hexahedron	$Hc=\frac{\sqrt{51-16\sqrt{2}}}{15}$ $\fallingdotseq 0.355$	$Hpn=Hc$	$Ho\geq\frac{\sqrt{2}}{4}\fallingdotseq 0.354$
正八面體 Regular Octahedron	$Oc=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\fallingdotseq 0.480$	$Op1=\frac{\sqrt{12+2\sqrt{6}-4\sqrt{6+3\sqrt{6}}}}{3}$ $\fallingdotseq 0.504$	$Oo\geq\frac{1}{2}=0.500$

2. 任意矩形內平行四邊形底高比例固定，此處已經求出高的極值由矩形長寬和平行四邊形長寬比決定。

二、使用尺規作圖與摺紙的等價關係，歸納摺出所找到展開圖、正多面體需要的技巧。

在摺紙中常用到的技巧，我們歸納出一些需要引用幾何和代數架構的方法：

1. 【摺紙技巧 1】摺 n 等分線段
2. 【摺紙技巧 2】摺 $\frac{m}{n}$ 倍線段
3. 【摺紙技巧 3】摺 $\sqrt{ab}$
4. 【摺紙技巧 4】摺勾股根號數
5. 【摺紙技巧 5】縮小再放大

另外在列出的展開圖中，TC-01、TC-02、TP1-01、TP2-01、TO-01、HC-01、HO-01、OC-01、OP1-01、OO-01，均爲可摺圖形。

柒、展望：

一、此處已經給出平行四邊形在 A4 比例矩形內的高極值，將來要探討剩下兩種正多面體和其他半正多面體（Archimedean Solid）、Johnson 多面體（Johnson solid）、……等等，多面體邊長極值或展開圖摺法，皆是一項利刃。

捌、參考資料：

一、張幼賢等(民 101)。翰林國民中學數學課本第四冊。翰林出版事業股份有限公司。

二、陳柏勳等：新北市立福和國民中學(民 96)。柏拉圖送禮。中華民國第四十七屆中小學科學展覽會國中組數學科作品。

三、邱建華等：新北市立五股國民中學(民 97)。形狀裝置。新北市九十六學年度中小學科學展覽會國中組數學科作品。

四、譚克平、陳宥良，〈運用摺紙提升學生尺規作圖技巧〉，《科學教育月刊》323， 15-24，2009。

五、洪萬生等。摺摺稱奇：初登大雅之堂的摺紙數學。三民書局。

六、Coad, L. (2006). Paper folding in the middle school classroom. Australian Mathematics Teacher, 62(1), 6-13.

七、陳創義副教授網站：http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc。國立臺灣師範大學數學系。

八、維基百科，正多面體：http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

九、維基百科，展開圖：http:// en.wikipedia.org/wiki/Net_(polyhedron)

十、維基百科，反角柱：http://en.wikipedia.org/wiki/Antiprism